



Programový dokument:	Jednotný programový dokument NUTS II – Bratislava Cieľ 3
Opatrenie:	2.2. Zlepšenie kvality zamestnania a konkurencieschopnosti Bratislavského regiónu prostredníctvom rozvoja ľudských zdrojov v oblasti výskumu a vývoja
Konečný prijímateľ/prijemca pomoci:	FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
Obdobie:	Marec – apríl 2007
Názov projektu:	Skvalitnenie podmienok pre prípravu vysokokvalifikovaných odborníkov v oblasti informačných technológií
Kód projektu ITMS:	13120200079

ZÁVEREČNÁ SPRÁVA

Vypracoval: Vladimír Palaj

Podpis: _____

Dátum: 30.4.2007

Algoritmy v metóde Bézierovho orezávania

Abstract. Finding the points of intersection of a curve and a line or two curves is based on the iterative method. The algorithms discussed in the paper indicate how the geometric properties of the Bezier representation, the distance function and the fat line are applied in the method of Bezier clipping.

1 Úvod

Vyšetrovanie bodov prieniku dvoch kriviek sa stalo komplexným problémom. Mnohí autori sa zaoberali týmto problémom a existuje mnoho príbuzných prác [1], [6], [7] [9]. V našom prístupe problém prieniku je riešený modifikovanou metódou *Bézierovho orezávania*¹ navrhnutou Nishitom a kol. [1998].

2 Metóda Bézierovho orezávania

Bézierovo orezávanie (Bezier clipping) je iteratívna metóda vyšetrenia prieniku Bézierovej krivky s priamkou, resp. s inou Bézierovou krivkou. Táto metóda využíva vlastnosť konvexného obalu Bézierových kriviek a postupne iteratívne orezáva tie časti krivky, ktoré nepretínajú danú priamku. Metóda bola vyvinutá pre raytracing Bézierových plôch.

Nech je daná množina bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ v priestore E (E^2, E^3) a nech $B_i^n(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ sú Bernsteinove polynómy. Potom Bézierova krivka n -tého stupňa je definovaná vzťahom

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{V}_i. \quad (1)$$

Táto reprezentácia pracuje so štyrmi bodmi $\mathbf{V}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ nazvanými **Bézierove riadiace body**. Body sú umiestnené v rovine $E = E^2$, t.j. $\mathbf{V}_i (v_i^x, v_i^y)$ a parametrická reprezentácia Bézierovej krivky má tvar:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) v_i^x \\ \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) v_i^y \end{bmatrix}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2)$$

V algoritmoch Bézierovho orezávania budeme pracovať s **funkcionálnou** (neparametrickou) **Bézierovou krivkou** [2]. Aby sme zapísali Bézierovu krivku vo funkcionálnom tvare, znížime jednu dimenziu na lineárne polynomickú:

¹ Z ang. *Bezier clipping*

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ g(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

a $g(t) = v_0 B_0^3(t) + v_1 B_1^3(t) + v_2 B_2^3(t) + v_3 B_3^3(t)$, kde $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ sú **Bézierove ordináty** (skalárne hodnoty). Parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$ alebo $t \in \langle a, b \rangle$ je rovnomerne rozmiestnený, t.j. $t_i = i/3$ alebo $t_i = a + i(b-a)/3$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Základné vyjadrenie Bézierových kriviek (1) pre $n = 3$ definuje krivku, ktorá svoje riadiace body $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ len aproximuje. V našich aplikáciách sa vyžaduje, aby Bézierova krivka prechádzala „presne“ cez zadané body, t.j. ich interpolovala.

Nech sú dané Bézierove riadiace body $\mathbf{V}_i = [i/3, v_i]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Potrebujeme vyšetriť súradnice dátových bodov $\mathbf{R}_i = [i/3, r_i]$ pomocou daných riadiacich bodov $\mathbf{V}_i$ na Bézierovej krivke. Použijeme funkcionálny tvar (3) a vypočítame sústavu rovníc

$$r_i = g(i/3) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(i/3) v_i, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

To znamená, že získame štyri rovnice a vyjadríme v maticovom zápise $r_i = I_{CBP} \cdot v_i$, kde I_{CBP} označuje maticu 4×4 . Výpočet (4) nazývame **inverziou Bézierovej krivky** zadanej svojimi riadiacimi vrcholmi **na krivku vyjadrenú ako polynomickeú funkciu (IBP algoritmus)**.

K tomu, aby sme vypočítali Bézierove riadiace body $\mathbf{V}_i = [i/3, v_i]$, presnejšie Bézierove ordináty v_i pomocou dátových bodov $\mathbf{R}_i = [i/3, r_i]$, zapíšeme inverznú maticu $I_{CPB} = I_{CBP}^{-1}$ a riešením na výpočet Bézierových ordinátov je

$$\begin{aligned} v_0 &= r_0, \quad v_1 = -15/18 r_0 + 54/18 r_1 - 27/18 r_2 + 6/18 r_3 \\ v_2 &= 6/18 r_0 - 27/18 r_1 + 54/18 r_2 - 15/18 r_3, \quad v_3 = r_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Výpočet (5) nazývame **inverziou krivky vyjadrenej ako polynomickeá funkcia na Bézierovu krivku (IPB algoritmus)**.

Konvexný obal a vlastnosť klesajúcej variácie²

Vlastnosť konvexného obalu (CHP - Convex hull property): Nech je daná množina bodov $X = \{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\} \subset E(E^2, E^3)$. Konvexným obalom množiny X nazývame množinu bodov

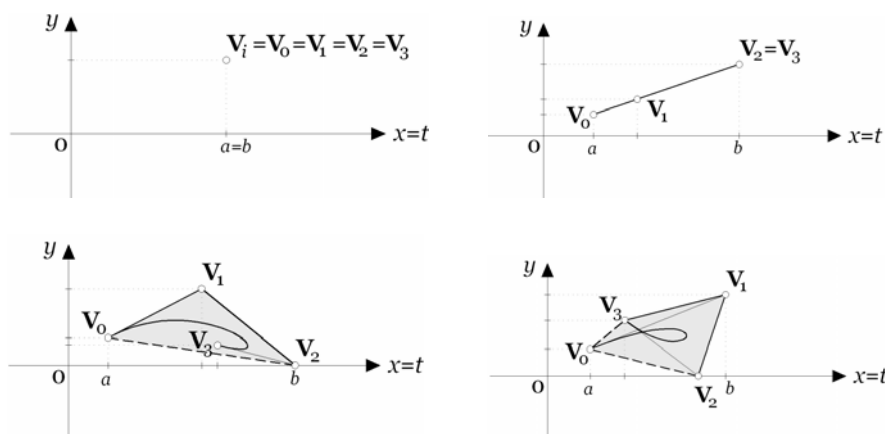
$$KO(X) = \left\{ a_0 x_0 + \dots + a_n x_n \mid \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, a_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (6)$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $t \in \langle 0, 1 \rangle$ bude $\mathbf{B}(t) \in \{\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\}$. To znamená, že každý bod Bézierovej krivky leží vnútri konvexného obalu definovaného riadiacimi vrcholmi tejto krivky.

Matematická reprezentácia konvexného obalu

Pretože budeme pracovať iba s konvexným obalom štyroch bodov riadiacej lomenej čiary, určíme konvexný obal Bézierovej krivky 3. stupňa nasledovne: *Konvexný obal štyroch bodov vo všeobecnosti je konvexný štvoruholník, ktorého vrcholmi sú dané body a v špeciálnych prípadoch to môže byť trojuholník; ak sú body kolineárne, môže to byť úsečka alebo bod.* Konvexný obal štyroch bodov ilustrujeme na príkladoch, obr. 1.

² Z ang. *Convex Hull and Variation Diminishing Property*



Obr. 1 Konvexný obal štyroch bodov v rovine

Vlastnosť klesajúcej variácie (VDP - Variation diminishing property): pre rovinnú Bézierovu krivku $\mathbf{B}(t)$, vlastnosťou VDP sa rozumie: *počet priesečníkov danej priamky s $\mathbf{B}(t)$ je menší alebo najvyšší rovný počtu priesečníkov priamky s jej kontrolným polygónom*. Tým je vyjadrená vlastnosť Bézierovej krivky, ktorá sprevádza jej riadiaci polygón „dosť tesne“ a nezatača sa viackrát než jej riadiaci polygón.

Vzdialenostná funkcia

Nech je priamka ℓ v rovine E^2 zadaná rovnicou:

$$\ell: ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 = 1 \quad (7)$$

s jednotkovým normálovým vektorom. Orientovaná vzdialenosť bodu (x, y) k priamke ℓ je vyjadrená

$$d(x, y) = \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2} = ax + by + c. \quad (8)$$

Substitúciou bodu na Bézierovej krivke (2) do (6) sa získa

$$d(t) = a \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) v_i^x + b \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) v_i^y + c \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) d_i, \quad (9)$$

kde $d_i = av_i^x + bv_i^y + c$. Funkcia $d(t)$ sa nazýva **vzdialenostnou funkciou** a skalárna hodnota d_i reprezentuje **orientovanú vzdialenosť** riadiaceho bodu $\mathbf{V}_i = (v_i^x, v_i^y)$ k priamke ℓ . Funkcia $d(t)$ je Bézierovou polynomickeou funkciou.

Hrubá priamka

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ sú Bézierove riadiace body v rovine. **Hrubou priamkou** Bézierovej krivky je každý rovinný pás s hraničnými priamkami rovnobežnými s priamkou $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_n$. Aby sa obmedzil počet hrubých priamok $\mathbf{B}(t)$, hrubou priamkou L kubickej Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{V}_i$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, sa bude nazývať množina bodov $X \in E^2$, ktorá spĺňa podmienku $d_{\min} \leq d_x \leq d_{\max}$, kde $d_{\min} = \min\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, $d_{\max} = \max\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$ a d_x, d_i , $i = 0, 1, 2, 3$ sú orientované vzdialenosti (9) bodov $X, \mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ k priamke $\ell = \mathbf{V}_0\mathbf{V}_3$. Priamka ℓ reprezentovaná ako (7), potom hraničné priamky ℓ', ℓ'' hrubej priamky L sú vyjadrené ako:

$$\ell' : ax + by + c + d_{\max} = 0, \ell'' : ax + by + c + d_{\min} = 0. \quad (10)$$

Všetky body konvexného obalu patriace Bézierovej krivke incidujú s hrubou priamkou $L = [\ell', \ell'']$.

3 Algoritmy Bézierovho orezávania

Algoritmy, uvedené v tejto časti, preukazujú, ako vlastnosti Bézierovej reprezentácie krivky môžu byť aplikované v problémoch prieniku krivky a priamky, resp. dvoch kriviek v rovine.

I. PT algoritmus (algoritmus polynóm – t parametrická os)

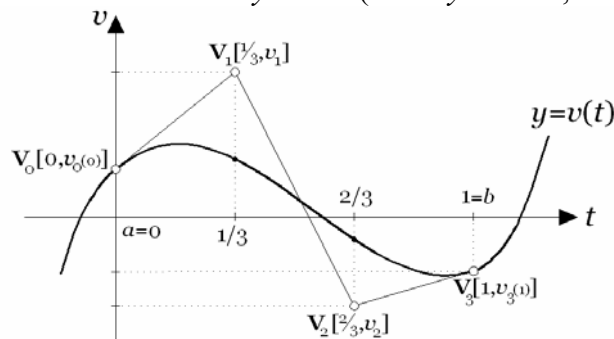
Cieľom je nájsť korene polynomickej funkcie.

Vstupné dáta: ■ polynóm definovaný funkcionálnou rovnicou

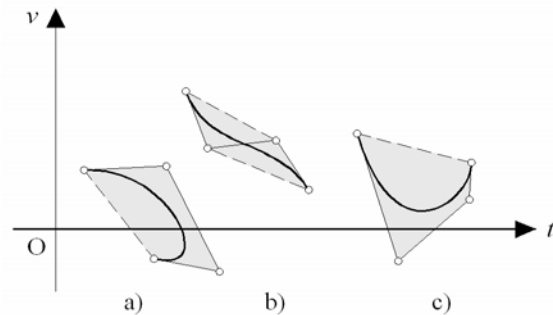
$$y = v(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad t \in \langle a, b \rangle$$

■ parametrická axis t zadaná rovnicou

$$y = 0 \quad (ax + by + c = 0, \text{ kde } a = c = 0). \quad (\text{Obr.2})$$



Obr. 2. PT algoritmus.



Obr. 3. Prienik konvexného obalu
Bez. krivky s parametrickou osou t .

Krok 1. Prepíšeme polynomicnú funkciu $v(t)$ na Bézierovu formu, t.j. aplikovaním IPB algoritmu (5) na zadanú polynomicnú funkciu $v(t)$ a získame Bézierove riadiace vrcholy $\mathbf{V}_0 = [a, v(a)]$, $\mathbf{V}_1 = [(2a+b)/3, v_1]$, $\mathbf{V}_2 = [(a+2b)/3, v_2]$, $\mathbf{V}_3 = [b, v(b)]$ pre rovnomerne rozmiestnený parameter t .

Krok 2. Určenie konvexného obalu riadiacich bodov vytvoreného segmentu krivky.

Krok 3. Test A (vylúčenie „nevhodných“ prípadov metódou prieniku konvexného obalu Bézierovej krivky a parametrickej osi t)

Test zistenia, či všetky riadiace body Bézierovej krivky ležia v jednej z opačných polrovín s hraničnou priamkou v osi t ; viac detailov v [8]. Napríklad, na obr. 3 je ilustrovaný vylúčený prípad b).

Krok 4. Test B

Test zistenia prieniku konvexného obalu Bézierovej krivky a osi t . Získa sa interval $[t_{\min}, t_{\max}]$. Pozri obr. 4a.

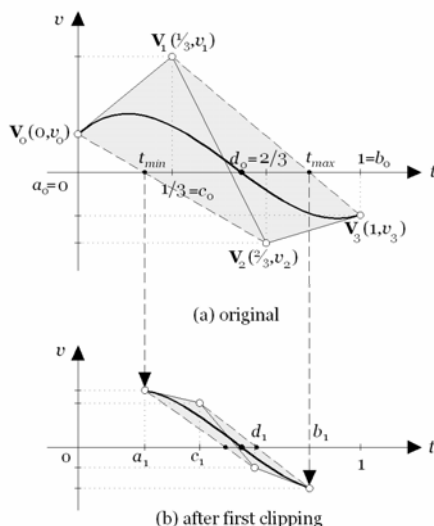
Krok 5. Pre hodnoty $t_{\min}$, $t_{\max}$ vyčíslíť ordináty bodov $\mathbf{B}(t_{\min})$, $\mathbf{B}(t_{\max})$ na Bézierovej krivke $\mathbf{B}(t)$. Dostávame nový interval pre krivku, ktorý korešponduje s intervalom $[t_{\min}, t_{\max}]$. Vymedzíme segmenty krivky korešpondujúce s intervalmi $t < t_{\min}$ a $t > t_{\max}$, pretože nepretínajú os t a „odrežeme“ ich (vzhľadom na VDP). Pozri obr. 4b.

Krok 6. Test C

percentuálne porovnanie zmeny novovzniknutého intervalu $[t_{\min}^i, t_{\max}^i]$, $i = 1, 2, \dots, m$ voči pôvodnému $[a, b]$, resp. predchádzajúcemu intervalu $[t_{\min}^{i-1}, t_{\max}^{i-1}]$, pretože platí $[t_{\min}^m, t_{\max}^m] \subseteq \dots \subseteq [t_{\min}^i, t_{\max}^i] \subseteq [t_{\min}, t_{\max}] \subseteq [a, b]$. Na obr. 4 je ukážka prvej iterácie. Bézierove orezávanie skončí, keď nastane jedna z týchto možností:

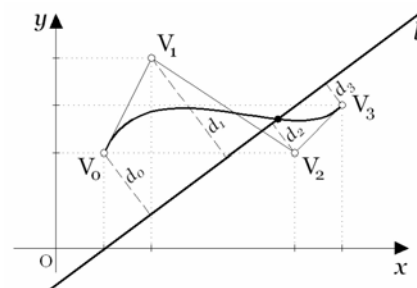
- Konvexný obal Bézierovej krivky v príslušnej iterácii nepretína os t – tým sa ukáže, že neexistuje ani prienik Bézierovej krivky s parametrickou osou alebo zadanou priamkou.
- Dĺžka intervalu je menšia než prahová hodnota ε . Algoritmus dáva pri každom orezaní ako návratovú hodnotu interval $[t_{\min}, t_{\max}]$ a skutočnosť, že nastane situácia, keď $[t_{\min}, t_{\max}] < \varepsilon$, budeme považovať za cieľovú a ako približnú hodnotu koreňa polynómu prehlásime stred intervalu $[t_{\min}^m, t_{\max}^m]$.

Výstupné dáta: koreň(-e) polynomickej funkcie

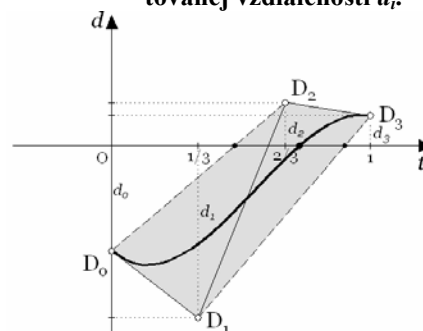


Obr. 4. PT algoritmus.

(a) Originál. (b) Po prvom orezaní.



Obr. 5. Zadanie CL algoritmu a vyčíslenie orientovanej vzdialenosti d_i .



Obr. 6. Výsledok CL algoritmu

II. CL algoritmus (Curve – Line algorithm)

Cieľom je nájsť prienik rovinnej Bézierovej krivky a priamky.

Vstupné dáta: ■ Bézierova krivka $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

- priamka ℓ implicitnou rovnicou $\ell: ax + by + c = 0$ v normovanom tvare, t.j. koeficienty a, b, c sú modifikované na formu $a^2 + b^2 = 1$.

Krok 1. Vyčíslenie orientovanej vzdialenosti $d_i \in \mathbb{R}$ riadiacich vrcholov Bézierovej krivky $\mathbf{V}_i$ od danej priamky ℓ . Obr.5.

Krok 2. Určenie “nových” riadiacich vrcholov $\mathbf{D}_i = [i/3; d_i]$ pre $i = 0, 1, 2, 3$. Obr.6.

Krok 3. Aplikujeme *PT algorithm* pre funkciu $d(t)$

Výstupné dáta: Bod(-y) prieniku Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t)$ a priamky ℓ .

III. CC algoritmus (Curve – Curve algorithm)

Cieľom je nájsť prienik dvoch rovinných Bézierových kriviek.

Vstupné dáta: ■ Dve Bézierove krivky $\mathbf{V}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, $t \in \langle a, b \rangle$,

$$\mathbf{P}(s) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(s) \mathbf{P}_i, \quad s \in \langle m, n \rangle. \quad \text{Obr.7.}$$

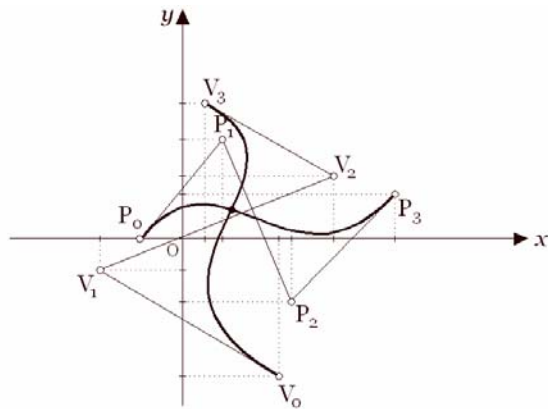
Krok 1. Test D

Test zistenia prieniku konvexných obalov dvoch Bézierových kriviek pomocou metódy Minmax obalov; viac detailov v [6].

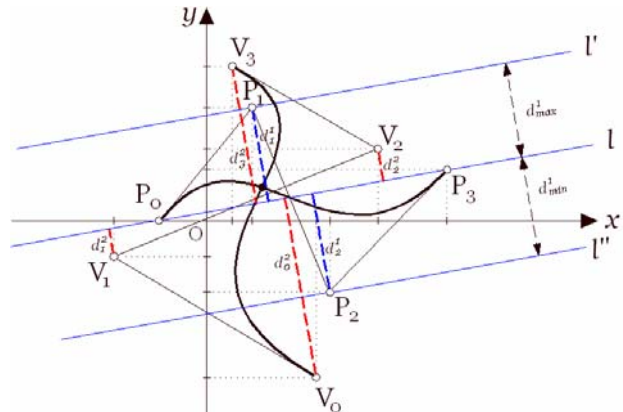
Krok 2. Konštrukcia hrubej priamky $\ell'\ell''$ krivky $\mathbf{P}(s)$, $s \in \langle m, n \rangle$ v smere priamky $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_3$. Pozri obr. 8. *Poznámka:* Ak zadané Bézierove krivky sú druhého alebo tretieho stupňa, podľa postupov uvedených v [8] je vhodné zúžiť hrubú priamku na užší rovinný pás.

Krok 3. Využitím predchádzajúcich algoritmov alebo ich častí sa nájde prienik(-y) Bézierovej krivky s priamkami ℓ' , ℓ'' . Uplatníme *CL algoritmus* a modifikovaný *PT algoritmus*. Obr. 9, 10.

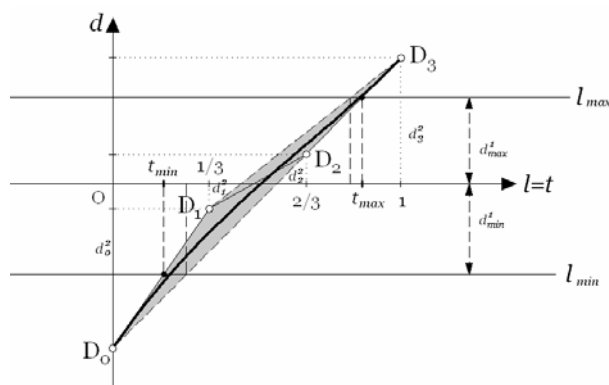
Výstupné dáta: Bod(-y) prieniku dvoch Bézierových kriviek $\mathbf{V}(t)$, $\mathbf{P}(s)$.



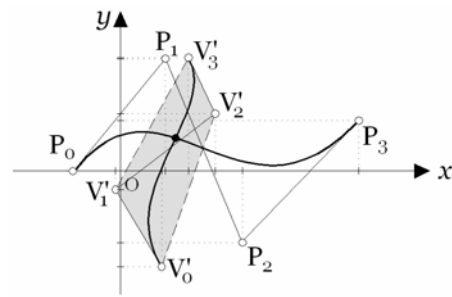
Obr. 7. CC algoritmus: zadanie



Obr. 8. CC algoritmus: konštrukcia hrubej priamky a orientované vzdialenosti



Obr. 9. CC algoritmus: novovytvorená Bézierova krivka



Obr. 10. CC algoritmus: výsledok prvej iterácie $\mathbf{V}(t)$

4 Záver

Modelovanie kriviek v CAGD predstavuje veľký fenomén v podobe algoritmických riešení vyšetřovania prieniku kriviek. Pretože naša práca, ako už bolo v úvode spomenuté, zahŕňa zatiaľ planárne konštrukcie a algoritmy, bude potrebné rozšírenie rovinných vzťahov na priestorové, čiže prechod z E^2 do priestoru E^3 . Snaha využiť vlastnosti dvojrozmerných matematických objektov v priestore E^3 bude vyžadovať napr. aj zmenu reprezentácie Bézierových kriviek na iný typ kriviek, nové konverzie, resp. inverzie medzi reprezentáciami kriviek, rozšírenie hrubej priamky na „hrubý pás“ a v neposlednom rade i zmena vzdialenostnej funkcie pre priestorové krivky.

Literatúra

- [1] EFRENOV, A., HAVRAN, V., SEIDEL, H.-P.: *Robust and Numerically Stable Bezier Clipping Method for Ray Tracing NURBS Surfaces*. Proceedings of SCCG, Budmerice 2005. ISBN 80-223-2057-9. pp. 123-131.
- [2] FARIN, G. – HANSFORD, D.: *The Essentials of CAGD*. Natick, MA: A K Peters Ltd., 2000.
- [3] KMEŤOVÁ, M.: *Dynamické geometrické programy vo vyučovaní Bezierových kriviek*. Proceedings of the 25th GCG. Janov nad Nisou, 2005, ČR. ISBN 80-7015-013-0. pp. 103-111.
- [4] KUDLIČKOVÁ, S.: *Working with Bézier Curves and Controlling Their Shape*. Proceedings of SCG'2004, vol. 13. Kočovce, SR. ISBN 80-227-2133-6. pp. 70-76.
- [5] KUDLIČKOVÁ, S., PALAJ V.: *Geometric Background of Bezier Clipping Method*, GCG'06, Nové Mesto na Moravě, 2006. ISBN 80-7040-902-9.
- [6] MARCH, D.: *Applied Geometry and Geometry Modelling*. Springer-Verlag, London, 1999.
- [7] NISHITA, T.: *Application of Bezier Clipping Method and Their Java Applets*. Proceedings of SCCG. Budmerice, 1998. ISBN 80-223-0837-4. Pp.3-15.
- [8] PALAJ, V.: *Algoritmy Bezierovho orezávania pre prieniky čiar*. Projekt dizertačnej práce. Comenius University, Bratislava, 2006.
- [9] SZARKOVÁ, D., ZÁMOŽÍK, J.: *Priesečníky čiar*. Proceedings of SCG'2004, vol. 13. Kočovce, 2004 , SR. ISBN 80-227-2133-6. pp. 119-125.

PRÍLOHA Č.1

Zoznam vlastných publikácií

- o Palaj V., Brisudová, Z., Novák, D., Slávičková, M.: *Bodin Videregaende Schole and our Didactical Situation*. Zborník 8, Bratislava 2004, ISBN 80-223-1833-7.
- o Kudličková, S., Palaj V.: *Geometric Background of Bezier Clipping Method*, GCG'06, Nové Mesto na Moravě, 2006. ISBN 80-7040-902-9.
- o Palaj, V.: *Vybrané kapitoly z CAD systémov (Zbierka príkladov z: AutoCAD verzia 2006)*. Zborník, Bratislava, 2007. v tlači